

Практика 1. Написать и прокомментировать формулу
числа вершин в зависимости от числа рёбер в
максимальном планарном графе.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Написать и прокомментировать формулу числа вершин в зависимости от числа рёбер в максимальном планарном графе.

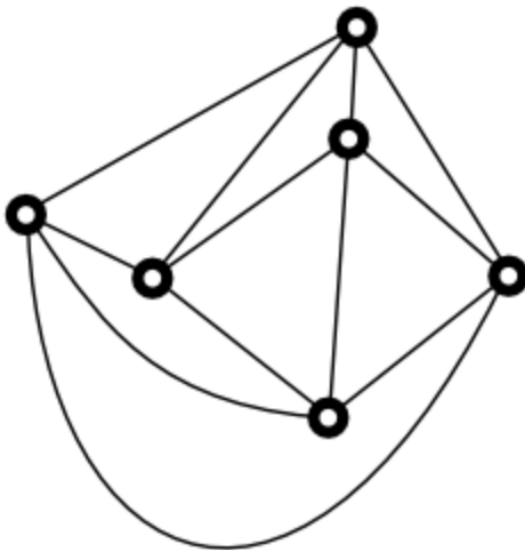
Определение.

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Определение.

Простой граф (конечный граф без кратных ребер и петель) называется **максимально планарным**, если он плоский, но добавление любого ребра (на заданному наборе вершин) разрушило бы это свойство.

Написать и прокомментировать формулу числа вершин в зависимости от числа рёбер в максимальном планарном графе.



Написать и прокомментировать формулу числа вершин в зависимости от числа рёбер в максимальном планарном графе.

Каждая грань в максимальном планарном графе имеет три вершины, поэтому максимальный планарный граф называется **триангулированным** и имеет ровно три внешних ребра.

Формула Эйлера. Если планарный связный граф имеет v вершин, e – количество ребер, f – количество граней, то они связаны формулой $v - e + f = 2$.

Следствие из формулы Эйлера. Планарный граф с числом вершин $v \geq 3$ имеет не более $3v - 6$ ребер. Триангулированный граф с v вершинами имеет $3v - 6$ ребер.

Доказательство. Каждая грань графа ограничена не менее тремя ребрами, а каждое ребро является границей не более двух граней, тогда $3f \leq 2e$. Отсюда по формуле Эйлера следует:

$$2 = v - e + f \leq v - e + \frac{2}{3}e \Rightarrow e \leq 3v - 6.$$

Для максимальнопланарного графа выполняется равенство $3f = 2e$, аналогично из формулы Эйлера получаем $e = 3v - 6$ и $f = 2v - 4$.

Практика 2(3). Что такое простая, однородная, без поглощений цепь Маркова?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Определение.

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ называется **простой** (то есть имеет конечное число возможных состояний – S) **цепью Маркова** (с дискретным временем), если

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = \\ = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n). \end{aligned}$$

Таким образом, в простейшем случае условное распределение последовательности состояний цепи Маркова зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний.

Матрица $P(n)$, где $P_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ называется матрицей **переходных вероятностей** на n -м шаге, а вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)^T$, где $p_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$ – начальное распределение цепи Маркова.

Что такое простая, однородная, без поглощений цепь Маркова?

Матрица переходных состояний является стохастической, то есть

$$\sum_{j \in S} P_{ij} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{сумма элементов матрицы по строке равна 1.}$$

Определение.

Цепь Маркова называется **однородной**, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага (матрица перехода постоянная), то есть $P_{ij}(n) = P_{ij}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение.

Цепь Маркова является **не поглощающей**, если в ней нет поглощающих состояний.

Состояние i называется **поглощающим**, если $P_{ii} = 1$.

Что такое простая, однородная, без поглощений цепь Маркова?

Основные требования к матрице переходных вероятностей:

- 1 Как уже писалось выше $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1, \quad \forall i \in S$;
- 2 Так как элементами матрицы являются условные вероятности перехода из одного состояния в другое, то $0 \leq p_{ij} \leq 1, \forall i, j \in S$.
- 3 Вероятность перехода в состояние j зависит только от текущего состояния i .

Практика 4. Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

Предположим, что точность определения начальных условий $\Delta_1 \ll 1$, т.е. две фазовые точки, расстояние между которыми меньше либо равно Δ_1 , мы различить не можем. Пусть вся эволюция происходит в конечной области фазового пространства с характерным размером $R \sim 1$. За время

$$T_1 \sim \frac{1}{h} \ln \frac{R}{\Delta_1}$$

траектории разойдутся на расстояние порядка системы, т.е. предсказать уже ничего нельзя. Тогда

$$\Delta_2 \sim \exp(-hT_2) \sim \exp(-2hT_1) \sim \Delta_1^2,$$

т.е. для того, чтобы горизонт прогноза увеличился в два раза, нужна точность, равная квадрату предыдущей.

Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

Пояснения.

Рассмотрим систему $x'(t) = f(x), x(0) = x^0$. На первый взгляд, кажется очевидным, что если мы будем рассматривать асимптотическое поведение ограниченных решений системы уравнений при $t \rightarrow \infty$, то $x(t)$ будет стремиться либо к постоянной, либо к периодической функции, и мы можем дать прогноз о ее значении на сколь угодно большое время.

Однако Э. Лоренц показал, что это не так. Оказалось, что если вектор $\vec{x}$ имеет три или более компонент, то модели могут описывать детерминированное непериодическое движение. (Это важно, например, потому, что линейные предикторы, полученные с помощью метода авторегрессии, в принципе не могут описывать такое поведение.) Математическим образом установившихся режимов являются притягивающие множества в фазовом пространстве — аттракторы.

Аттракторы, описывающие непериодическое движение, получили название **странных**.

Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

Типичным и очень важным свойством странных аттракторов является чувствительность к начальным данным. Грубо говоря, это свойство означает, что почти все бесконечно близкие траектории с течением времени экспоненциально разбегаются.

Отличия от регулярного движения:

- ❶ Сложные, неповторяющиеся траектории;
- ❷ Непредсказуемость поведения системы на больших временах (зависимость от начальных условий).

Отличие от случайного процесса состоит в том, что нерегулярность происходит из самой системы, а не от внешнего фактора (шум, флуктуации). В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к "запутыванию траекторий".

Аттрактор – притягивающее предельное множество.

Компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.

Пусть с течением времени произвольное начальное состояние из притягивающей области G , включающая в себя аттрактор G_0 , релаксирует к G_0 .

Движение, которому отвечает фазовая кривая в области притяжения, есть **переходный процесс**.

Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий к некоторому **инвариантному (остающееся неизменным при преобразованиях определённого типа) предельному множеству**, то есть аттрактору G_0 .

Пусть A — множество и G — множество отображений из A в A . Отображение f из множества A в множество B называется инвариантом для G , если для любых $a \in A$ и $g \in G$ выполняется тождество $f(a) = f(g(a))$.

Аттракторы типа состояний равновесия, предельных циклов или n -мерных торov называются **простыми** или **регулярными**.

Странный аттрактор – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве размерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения динамических систем.

Практика 5. Как определяется показатель Ляпунова и что он характеризует?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Как определяется показатель Ляпунова и что он характеризует?

Динамическая система(ДС) – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течение времени.

Математическая модель ДС: введены параметры (координаты), характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор ϕ_t , позволяющий установить изменение координат во времени.

Аттрактор – притягивающее множество.

Странный аттрактор – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве размерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения ДС.

Экспоненциальное разбегание фазовых траекторий

Рассмотрим две фазовые точки, расстояние между которыми $\Delta(0)$ в начальный момент времени мало. В момент времени t оно равно $\Delta(t)$, причем $\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \sim e^{ht}$, где h – некоторое число, характеризующее скорость разбегания траекторий.

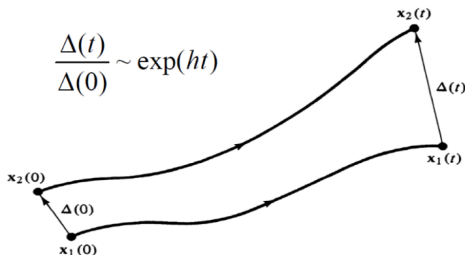


Рис. 1. Фазовые траектории.

В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к «запутыванию траекторий».

Показатель Ляпунова

Количественной мерой, характеризующей странный аттракторы, является число Ляпунова (характеристика экспоненциального разбегания)

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}.$$

Например в трехмерном пространстве существует 4 типа аттракторов, которые определяются показателями Ляпунова $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

- ❶ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$ – устойчивая неподвижная точка;
- ❷ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ – устойчивый предельный цикл;
- ❸ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ – устойчивый двумерный тор;
- ❹ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ – странный аттрактор.

Рассмотрим линейное ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$

Его решение x с начальным условием $x(0) = x_0$ будет иметь вид:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

Если теперь рассмотреть решение $\tilde{x}$ с возмущенным начальным условием $\tilde{x}(0) = x_0 + \delta x_0$, оно будет иметь вид:

$$\tilde{x}(t) = (x_0 + \delta x_0) e^{\lambda t}$$

Для разности этих решений $\delta x = \tilde{x} - x$ будет выполняться

$$\frac{d}{dt} \delta x = \lambda \cdot \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0, \quad \delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$$

При этом величина λ называется **показателем Ляпунова** и при $\lambda > 0$ характеризует скорость расхождения близких траекторий; за время $t = 1/\lambda$ расхождение траекторий увеличивается в e раз, это время называется **временем Ляпунова** (также удобно использовать время $t = \ln 2 / \lambda$, за которое расхождение увеличивается в 2 раза); при $\lambda < 0$, соответственно, траектории сходятся друг к другу.

λ может быть выражена через решения следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)}$$

при этом в линейном случае результат не зависит от δx_0 и t и точки x_0 , окрестность которой рассматривается.

В общем случае нас интересует поведение траекторий на достаточно большом времени при достаточно малых отклонений от заданной точки x_0 , поэтому для некоторого семейства отображений $x(t) = F(t, x_0)$ (которое может, например, отвечать решению какого-то ОДУ с начальным условием x_0) показатель Ляпунова можно определить следующим образом:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left| \frac{F(t, x_0 + \delta x) - F(t, x_0)}{\delta x} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\partial}{\partial x} F(t, x_0) \right|$$

В частности, если задано нелинейное ОДУ с гладкой функцией f

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

и рассматривается окрестность стационарной точки $x_0 : f(x_0) = 0$:

$$\frac{d}{dt} \delta x = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \delta x + O(\delta x^2)$$

тогда при фиксированном t и достаточно малом начальном отклонении δx_0 выполняется

$$\delta x(t) \approx \delta x_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad \lambda = f'(x_0)$$

Рассмотрим теперь семейство отображений $\bar{x}(t) = F(t, \bar{x}_0)$ при $\bar{x} \in \mathcal{R}^n$ (например, соответствующее решение системы ОДУ) – в таком случае $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} F(t, \bar{x}_0)$ представляет собой линейный оператор (т.е. производная понимается в смысле Фреше), и есть смысл рассматривать его спектр – собственные значения, или, в более общем случае, сингулярные числа $\{\sigma_i(t)\}$. Спектр Ляпунова можно определить как $\{\lambda_i - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t)\}$, показателем расхождения будет наибольшее число в спектре.

В случае систему ОДУ по спектру в окрестности стационарной точки можно судить о ее устойчивости (все числа отрицательные) или неустойчивости (все числа положительные).

Практика 6. Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

Эргодичность

Пусть фазовый объем сохраняется, движение происходит в некоторой ограниченной области D с объемом V_D , $h(x)$ – некоторая функция. Введем формулы:

$$\bar{h}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(F^t(x)) dt,$$

$$\langle h \rangle = V_D^{-1} \int_D h(x) dV, \quad dV = dx_1, \dots, dx_n.$$

Будем называть $\bar{h}(x)$ – среднее по времени, а $\langle h \rangle$ – фазовое среднее.

Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

Движение называется эргодическим, если для произвольной интегрируемой функции $h(x)$ и почти всех начальных условий x_0 справедливо равенство временных и фазовых средних:

$$\overline{h}(x_0) = \langle h \rangle . \quad (1)$$

Если равенство (1) выполняется для всех (или почти всех) фазовых траекторий динамической системы, то система называется эргодической.

В эргодической системе относительное время, проведенное фазовой траекторией внутри некоторой области, равно относительному объему этой области (независимо от выбора начальных условий). Таким образом, траектория эргодической системы будет равномерно и плотно заполнять всё фазовое пространство D .

Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

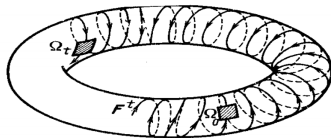


Рис.: Пример: квазипериодическое движение на поверхности тора (эргодическая траектория при иррациональном значении отношения частот).

Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

Эргодичность специальное свойство некоторых динамических систем, состоящее в том, что в процессе эволюции почти каждое состояние с определенной вероятностью проходит вблизи любого другого состояния системы.

Для эргодических систем математическое ожидание по временным рядам должно совпадать с математическим ожиданием по пространственным рядам.

То есть для определения параметров системы можно долго наблюдать за поведением одного ее элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все ее элементы (или достаточно много элементов).

Если система обладает свойством эргодичности, то в обоих случаях получается одинаковый результат.

Преимущество эргодических систем заключается в том, что при достаточном времени наблюдения такие системы можно описать статистическими методами. Например, температура газа – мера средней энергии молекул. (Предварительно нужно доказывать эргодичность системы).

Практика 7. Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием..

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

В математике, смешивание является абстрактным понятием, происходящим из физики: попытка описать необратимый термодинамический процесс смешивания в повседневном мире: смешивание красок, смешивание напитков и т.д.

Это понятие появляется в эргодической теории - исследовании случайных процессов и динамических систем, сохраняющих меру. Существует несколько различных определений смешивания, включая сильное перемешивание, слабое перемешивание. Некоторые из различных определений микширования можно расположить в иерархическом порядке; таким образом, сильное перемешивание означает слабое перемешивание. Кроме того, слабое перемешивание (и, следовательно, также сильное перемешивание) подразумевает эргодичность: то есть каждая система, которая слабо перемешивается, также является эргодической (и поэтому говорят, что перемешивание является «более сильным» понятием, чем эргодичность).

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ будет динамической системой, где T - время эволюция или оператор сдвига.

Система называется **сильным перемешиванием**, если $\forall A, B \in \mathcal{A}$ один имеет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B).$$

Чтобы понять приведенное выше определение физически, рассмотрим шейкер M , наполненный несжимаемой жидкостью, которая состоит из 20% вина и 80% воды. Если A – это область, изначально занятая вином, то для любой области внутри шейкера процент вина в после повторений процесса перемешивания составляет

$$\frac{\mu(T^n A \cap B)}{\mu(B)}.$$

В такой ситуации можно было бы ожидать, что после того как жидкости достаточно перемешаны ($n \rightarrow \infty$), каждая область шейкера будет содержать приблизительно 20% вина.

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Это приводит к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(T^n A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(A)}{\mu(M)} = \mu(A),$$

где $\mu(M) = 1$, поскольку сохраняющие меру динамические системы определены в вероятностных пространствах, и, следовательно, окончательное выражение подразумевает приведенное выше определение сильного перемешивания.

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Определение. Динамическая система называется **слабым перемешиванием**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Другими словами T – сильное перемешивание, если

$$\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B) \rightarrow 0 \quad \text{в обычном смысле.}$$

Слабое перемешивание, если

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| \rightarrow 0 \quad \text{в смысле Чезаро.}$$

Эргодичность, если

$$\mu(A \cap T^{-n}B) \rightarrow \mu(A)\mu(B) \quad \text{в смысле Чезаро.}$$

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Определение суммирования Чезаро.

Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ будет последовательностью, и пусть $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, его k -ая частичная сумма.

Последовательность (a_n) называется **суммируемая по Чезаро**, с суммой Чезаро $A \in R$, если, когда n стремится к бесконечности, среднее арифметическое его первых n частичных сумм $s_1, s_2, \dots, s_n$ стремится к A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = A.$$

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Следовательно, сильное перемешивание означает слабое перемешивание, что подразумевает эргодичность. Однако обратное неверно: существуют эргодические динамические системы, которые не являются слабо перемешивающими, и слабо перемешивающие динамические системы, которые не являются сильно перемешивающими.

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

L^2 формулировка

Эргодичность равносильна справедливости для любых функций $f, g \in L^2$ соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \left(\int_X f(x) g(T^s x) \mu(dx) - \int_X f(x) \mu(dx) \int_X g(x) \mu(dx) \right) = 0,$$

Слабое перемешивание

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \left(\left| \int_X f(x) g(T^s x) \mu(dx) - \int_X f(x) \mu(dx) \int_X g(x) \mu(dx) \right| \right) = 0,$$

Сильное перемешивание:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_X f(x) g(T^t x) \mu(dx) - \int_X f(x) \mu(dx) \int_X g(x) \mu(dx) \right) = 0.$$

Практика 8. Формула зависимости рода поверхности γ от числа вершин графа – n остовного графа n -мерного куба.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Формула зависимости рода поверхности γ от числа вершин графа – n остовного графа n -мерного куба.

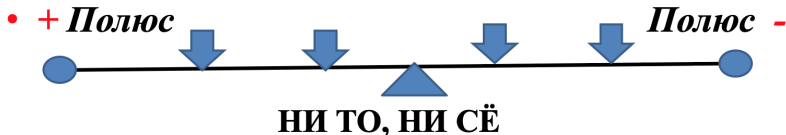
Рассмотрим модель полярных признаков порядка n . Допустим, у нас есть n независимых шкал для определения черт литературных героев.

Например, $n = 3$, и есть три измерения: слабый - сильный, умный - глупый, красивый - безобразный. Представим себе трехмерный куб, в котором каждая точка отвечает какому-то набору из этих трех признаков. Ребрами будут соединены точки, которые отличаются только по одному из этих признаков, например, (слабый, умный, красивый) связан с (слабый, глупый, красивый), но не связан с (сильный, глупый, безобразный). Такой куб расплющивается на плоскость и натягивается на сферу без пересечений ребер (кроме как в вершинах), т.е. род поверхности $p = 0$.

Измерений может быть больше: тогда описание становится более многогранным, шкала общей оценки героев получает большее число делений (так, например, Обломов — герой ни то, ни се, хотя мы оцениваем, казалось бы, каждый признак по двум крайностям).

Формула зависимости рода поверхности γ от числа вершин графа – n остовного графа n -мерного куба.

Шкалы семантического дифференциала и актуальность многомерного куба



- 1: **душевный** - **черствый**
- 2: **аккуратный** - **неряшливый**
- 3: **волевой** - **безвольный**
- 4: **трудолюбивый** - **ленивый**
- 5: **спокойный** - **нервный**

 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ГЕРОЙ

Формула зависимости рода поверхности γ от числа вершин графа – n остовного графа n -мерного куба.

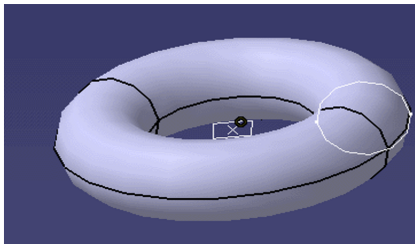
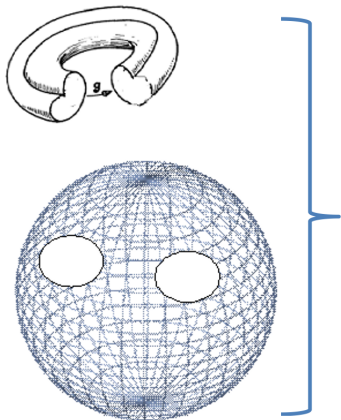
Однако с увеличением числа измерений приходится увеличивать и значение рода поверхности, чтобы многомерные кубы растягивались на нее без пересечения ребер. Минимальный род двумерных поверхностей $= \gamma(n)$, на которых граф n -мерного куба будет представлен без пересечений ребер, записывается формулой (пересечения ребер также называют светофорами).

$$y(n) = (n - 4) * 2^{n-3} + 1 - \text{Байнеке Л.В., Харари Ф. (1974)}$$

Род поверхности увеличивается за счет приклеивания ручек к сфере (см. рисунок).

Формула зависимости рода поверхности γ от числа вершин графа – n остовного графа n -мерного куба.

Метод построения поверхностей рода $\gamma > 0$ –
приклеивание «ручек» к вырезанным отверстиям



$\gamma = 1$

Формула зависимости рода поверхности γ от числа вершин графа – n остоного графа n -мерного куба.

Чтобы посчитать, сколько ручек нужно добавить, чтобы растянуть граф без пересечения ребер (безсветофорная сеть), используется формула, где вместо n подставляется размерность графа n -мерного куба

$$y(n) = (n - 4) * 2^{n-3} + 1$$

Так, например, для 5-мерного куба нужно прикрутить к сфере $y(5) = (5 - 4) * 2^{5-3} + 1 = 5$ ручек.

Практика 9. Как формализован переход от эмпирических данных двумерной таблицы к матрице переходных вероятностей?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Как формализован переход от эмпирических данных двумерной таблицы к матрице переходных вероятностей?

Определение.

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ называется **простой** (то есть имеет конечное число возможных состояний – S) **цепью Маркова** (с дискретным временем), если

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

Таким образом, в простейшем случае условное распределение последовательности состояний цепи Маркова зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний.

Матрица $P(n)$, где $P_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ называется матрицей **переходных вероятностей** на n -м шаге, а вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)^T$, где $p_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$ – начальное распределение цепи Маркова.

Как формализован переход от эмпирических данных двумерной таблицы к матрице переходных вероятностей?

Матрица переходных состояний является стохастической, то есть

$$\sum_{j \in S} P_{ij} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{сумма элементов матрицы по строке равна 1.}$$

Определение.

Цепь Маркова называется **однородной**, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага (матрица перехода постоянная), то есть $P_{ij}(n) = P_{ij}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение.

Цепь Маркова является **не поглощающей**, если в ней нет поглощающих состояний.

Состояние i называется **поглощающим**, если $P_{ii} = 1$.

Как формализован переход от эмпирических данных двумерной таблицы к матрице переходных вероятностей?

Основные требования к матрице переходных вероятностей:

- 1 Как уже писалось выше $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathbb{N};$
- 2 Так как элементами матрицы являются условные вероятности перехода из одного состояния в другое, то $0 \leq p_{ij} \leq 1, \forall i, j \in S.$
- 3 Вероятность перехода в состояние j зависит только от текущего состояния i .

Как формализован переход от эмпирических данных двумерной таблицы к матрице переходных вероятностей?

Алгоритм перехода от эмпирических данных двумерной таблицы к матрице переходных вероятностей.

Пусть $t_0, t_1, \dots, t_n$ – точки дискретного времени, такие что $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \text{const}$.

Пусть $N(\Delta t_k)$ – двумерная таблица с эмпирическими данными, где каждый элемент $n_{ij}(\Delta t_k)$ – число наблюдений, в которых произошел переход из состояния i в состояние j за время Δt_k . Обозначим $n_i(t_k)$ – число наблюдений, где объект находился в состоянии i в момент времени t_k .

Тогда элементы $p_{ij}(t_k)$ матрицы переходных вероятностей P имеют вид:

$$p_{ij}(t_k) = \frac{n_{ij}(\Delta t_k)}{n_i(t_k)}.$$

Из свойств матрицы переходных вероятностей знаем, что

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i}, \quad \forall i$$

Практика 10. Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

Теорема Куратовского-Понтрягина – это теорема в теории графов, дающая необходимое и достаточное условие планарности графа.

Определение.

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Теорема.

Граф планарен тогда и только тогда, когда не содержит подграфов гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$

Определение.

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

Определение.

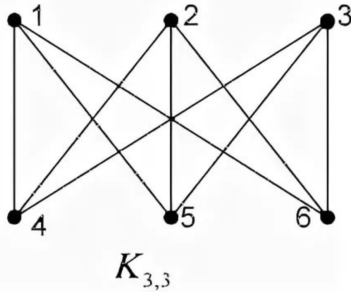
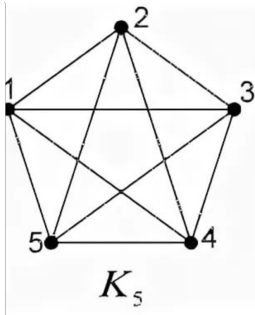
Графы G_1 и G_2 – гомеоморфны, если применяя к каждому из них операцию разбиения ребер, можно привести их к двум изоморфным графам.

Определение.

В теории графов изоморфизмом графов $G = \langle V_G, E_G \rangle$ и $H = \langle V_H, E_H \rangle$ называется биекция между множествами вершин графов $f: V_G \rightarrow V_H$ такая, что любые две вершины u и v графа G смежны тогда и только тогда, когда вершины $f(u)$ и $f(v)$ смежны в графе H .

Здесь графы понимаются неориентированными и не имеющими весов вершин и ребер. В случае, если понятие изоморфизма применяется к ориентированным или взвешенным графам, накладываются дополнительные ограничения на сохранение ориентации дуг и значений весов. Если изоморфизм графов установлен, они называются изоморфными и обозначаются как $G \simeq H$.

Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?



Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

Доказательство.

1. Проверим планарность графа K_5 : $p = 5$, q – число рёбер.
Условие планарности: $q \leq 3p - 6$, т.е. $q_{\text{план}} = 9$, но в K_5 $q = 10$;
Аналогично для $K_{3,3}$: $q_{\text{план}} = 12$, а по факту для $K_{3,3}$ $q = 16$.
2. Так как графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны, то это значит, что содержащие их в качестве подграфов графы также непланарны, ч.т.д.

Для проверки планарности графа с p вершинами по этому критерию необходимо рассмотреть C_p^5 графов с пятью вершинами и C_p^6 графов с шестью вершинами.

Практика 11. Дать определение топологической энтропии?
В чём её отличие от метрической энтропии?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Пусть X – компактное метрическое пространство, α — его открытое покрытие (покрытие в математике – семейство множеств, таких, что их объединение содержит заданное множество), $N(\alpha)$ – наименьшая мощность подпокрытия (наименьшее число множеств, которые в объединении будут содержать X).

Определение 1.

Топологической энтропией покрытия α называется логарифм наименьшей мощности подпокрытия:

$$H(\alpha) = \ln N(\alpha).$$

Поскольку X компактно, $H(\alpha)$ – конечное число.

Пусть β – другое открытое покрытие пространства X .

Определение 2.

Измельчением покрытий α и β будем называть

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

В более общем случае можно рассмотреть семейство открытых покрытий

$$\{\alpha_r | r = 1, \dots, n\}$$

и определить измельчение этих покрытий

$$\bigvee_{r=1}^n \alpha_r = \{A_1 \cap \dots \cap A_n | A_1 \in \alpha_1, \dots, A_n \in \alpha_n\}.$$

Ясно, что измельчение покрытий также является покрытием.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$. Прообраз покрытия α

$$f^{-1}\alpha = \{f^{-1}(A) | A \in \alpha\}$$

также покрывает пространство X . Для $n \geq 1$ рассмотрим следующее измельчение:

$$\begin{aligned} \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha &= \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-(n-1)}\alpha = \\ &= \{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) | A_0, \dots, A_{n-1} \in \alpha\}. \end{aligned}$$

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение 3.

Топологической энтропией отображения f относительно покрытия α называется

$$h(f, \alpha) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha \right).$$

Можно показать, что для каждого f справедливо $h(f, \alpha) \leq H(\alpha)$. Поэтому верхний предел в последнем определении всегда существует. Более того, его можно заменить обычным пределом $\lim$ или знаком точной нижней грани $\inf$. То есть получим

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha \right) = \inf_n \frac{1}{n} \cdot H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha \right).$$

(Существование предела обеспечивает лемма Поля).

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение 4.

Топологической энтропией отображения f называется

$$h(f) = \sup_{\alpha} \{h(f, \alpha)\}.$$

Однако так данное определение не очень удобно для практических вычислений. Поэтому рассмотрим эквивалентные определения топологической энтропии непрерывного отображения f .

Пусть $n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Определение 5.

Конечное подмножество $S \subset X$ называется (n, ε) -отделимым, если $\forall x, y \in S, x \neq y$, найдется такое $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, что $\rho(f^k(x), f^k(y)) \geq \varepsilon$, где ρ – метрика на пространстве X .

Обозначим $s(n, \varepsilon)$ максимальную мощность (n, ε) -отделимого множества. В силу компактности X выполнено $s(n, \varepsilon) < +\infty$.

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение 6.

Конечное подмножество $R \subset X$ называется (n, ε) -плотным, если $\forall x \in X, \exists y \in R$, что для любого $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, справедливо $\rho(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon$.

Обозначим $r(n, \varepsilon)$ максимальную мощность (n, ε) -плотного множества. Благодаря компактности $r(n, \varepsilon) < +\infty$.

Определение 7.

Имеют место следующие равенства(эквивалентно определению энтропии):

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon).$$

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение формализует следующее нестрогое понятие: для неизвестной начальной точки, какое количество информации нужно получить в расчёте на одну итерацию, чтобы предсказать большое количество итераций с небольшой фиксированной ошибкой.

В теории динамических систем, энтропия динамической системы — число, выражающее степень хаотичности её траекторий. Метрическая энтропия описывает хаотичность динамики в системе с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере, а топологическая энтропия описывает хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.

Практика 12. Написать формулу связи между
топологической энтропией и фрактальной размерностью.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Дадим общее определение **мультифрактала**. Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область ζ размера L в Евклидовом пространстве с размерностью d .

Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество из $N \gg 1$ точек, как-то распределенных в этой области. Будем предполагать, что, в конце концов, $N \rightarrow \infty$.

Разобьем всю область ζ на кубические ячейки со стороной $\varepsilon \ll L$ и объемом ε^d . Далее нас будут интересовать только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка. Пусть номер занятых ячеек i изменяется в пределах $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ – суммарное количество занятых ячеек, которое, конечно, зависит от размера ячейки ε .

Пусть $n_i(\varepsilon)$ представляет собой количество точек в ячейке с номером i , тогда величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$$

представляет собой вероятность того, что наугад взятая точка из нашего множества находится в ячейке i .

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Другими словами, вероятности p_i характеризуют относительную заселенность ячеек. Из условия нормировки вероятности следует, что

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1.$$

Стандартный метод мульти-фрактального анализа основан на рассмотрении *обобщенной статистической суммы* $Z(q, \varepsilon)$, в которой показатель степени q может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon).$$

Спектр *обобщенных фрактальных размерностей* D_q (*размерностей Реньи*), характеризующих данное распределение точек в области ζ , определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q - 1},$$

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

где нелинейная функция $\tau(q)$ (в научной литературе она называется *скейлинговой экспонентой*) имеет вид

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln \varepsilon}.$$

Как мы покажем ниже, если $D_q = D = \text{const}$, т.е. не зависит от q , то данное множество точек представляет собой обычный фрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью D . Напротив, если функция D_q как-то меняется с q , то рассматриваемое множество точек является мультифракталом.

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется скейлинговой экспонентой $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}.$$

Покажем теперь, как ведет себя обобщенная статистическая сумма в случае обычного регулярного фрактала с фрактальной размерностью D . В этом случае во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек $n_i(\varepsilon) = N/N(\varepsilon)$, то есть фрактал является однородным.

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Тогда очевидно, что относительные населенности всех ячеек, $p_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, тоже одинаковы, и обобщенная статистическая сумма принимает вид $Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon)$.

Учтем теперь, что, согласно определению фрактальной размерности D , число занятых ячеек при достаточно малом ε ведет себя следующим образом: $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}$.

Отсюда видно, что в случае обычного фрактала функция $\tau(q) = (q-1)D$ – является линейной. Тогда все $D_q = D$ и не зависят от q . Для фрактала, все обобщенные фрактальные размерности D_q которого совпадают, часто используется термин монофрактал.

Если распределение точек по ячейкам неодинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. представляет из себя мультифрактал, и для его характеристики необходим целый спектр обобщенных фрактальных размерностей D_q , число которых, в общем случае, бесконечно.

Так, например, при $q \rightarrow +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью их заполнения p_i . Наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в сумму дают самые разреженные ячейки с малыми значениями заполнения p_i .

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Таким образом, функция D_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек ζ .

Для $q = 0$, $Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon)$ получаем формулу

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right],$$

это означает, что величина D_0 представляет собой хаусдорфову размерность множества ζ .

Определение.

Фрактальная (хаусдорфова) размерность D_F произвольного предельного множества G в N -мерном фазовом пространстве определяется следующей формулой по Колмогорову-Хаусдорфу:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \right],$$

где $M(\varepsilon)$ - минимальное число N -мерных кубиков со стороной ε , необходимых для покрытия всех элементов множества G .

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Хаусдорфова размерность D_0 – характеризует «пористость» или плотность объекта, то есть то, как объект заполняет собою пространство вложения.

Выясним теперь смысл величины D_1 . Статистическая сумма равна

$$\begin{aligned} Z(1, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \exp[(q-1) \ln p_i] \approx (\text{при } q \rightarrow 1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1)p_i \ln p_i] = \\ &= 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \end{aligned}$$

В результате получаем формулу

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}$$

. С точностью до знака в числителе находится энтропия Шеннона (количество информации, необходимое для определения состояния системы в пределах точности ε):

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i.$$

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Поскольку энтропия является мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении i , можно сказать, что величина D_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. Благодаря этому свойству величину D_1 называют информационной размерностью.

Мы знаем, что энтропия достигает своего максимального значения при равенстве вероятности $p_i = 1/N(\varepsilon)$, тогда мы получим в этом предельном случае, что $D_0 = D_1$.

Теория 1. Формулировка и смысл теоремы Андропова-Понтрягина.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Грубость, или структурная устойчивость — важнейшее условие корректности задания модели, а корректность задание - важнейшее требование к математической модели.

Основная идея: достаточно малые изменения грубой системы должны приводить к соответственно малым изменениям в динамике ее поведения.

Только грубые системы могут описывать реальные процессы. Поэтому теорема Андронова-Понтрягина имеет важное значение для поиска состояний равновесия системы.

Рассмотрим множество двумерных систем на плоскости, заданных уравнением $x' = X(x)$, где $X(x_1, x_2) - \mathbb{C}^r$ -гладкая (непрерывно - дифференцируемая до порядка r) функция ($r \geq 1$), определенная в замкнутой и ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Область называется ограниченной, если существует круг на плоскости или шар в пространстве, содержащий данную область.

Замкнутая, ограниченная область называется компактом.

Введем на этом множестве следующую норму:

$$\|X\|_{C^1} = \sup_{x \in G} \left(\|X\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| \right).$$

В данной норме множество систем становится банаховым пространством, которое мы обозначаем B или B_G . Банахово пространство — нормированное векторное пространство, полное по метрике, порождённой нормой.

Полное метрическое пространство — метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого же пространства).

Также определим δ -окрестность системы X как множество всех систем $\tilde{X}$, удовлетворяющих условию $\|\tilde{X} - X\|_{C^1} < \delta$.

Определение

Динамическая система X называется **грубой в области G** , если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$:

- ① все системы в δ -окрестности системы X топологически эквивалентны X ;
- ② гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε -близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε).

Естественно наложить некоторые ограничения, касающиеся границы ∂G области G , как это было сделано в исходном определении грубости, а именно: ∂G должна быть гладкой замкнутой кривой, не касательной к векторному полю (кривой без контакта).

Заметим, что в случае динамических систем на компактных гладких поверхностях область G совпадает со всей поверхностью таким образом, каких-либо граничных условий не возникает.

Теорема Андронова-Понтрягина

Система X является грубой в плоской области G тогда и только тогда, когда

- 1 не существует состояний равновесия с характеристическим показателем на мнимой оси;
- 2 не существует периодических орбит с мультипликатором на единичной окружности;
- 3 не существует сепаратрис, идущих из седла в другое (или то же самое) седло.

Характеристический показатель (Ляпунова) функции $d(t)$ — действительное число, определяемое соотношением $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d(t)}{d_0} \right|$. Это величина, характеризующая скорость удаления друг от друга траекторий. Положительность показателя Ляпунова обычно свидетельствует о хаотическом поведении системы.

Состояния равновесия — узлы, фокусы, седла (положение "центр" достигается как раз при чисто мнимом показателе).

Мультипликатор периодической точки — в теории динамических систем, собственное значение дифференциала отображения за период в этой точке

Последнее условие может быть переформулировано как отсутствие гомоклинических и гетероклинических траекторий.

Гомоклинические траектории — траектории, которые выходят и приходят в одно и то же положение равновесия.

Гетероциклические — которые выходят из одного положения равновесия и приходят в другое.

Сепаратрисы седла — кривые, которые в точке покоя касаются прямых-асимптот.

Из приведенной выше теоремы следует, что грубая система на плоскости может обладать только грубыми состояниями равновесия (узлами, фокусами и седлами) и грубыми предельными циклами. Что касается сепаратрис седел, они либо асимптотически стремятся к узлу, фокусу или предельному циклу, или покидают область G за конечный отрезок времени.

Очевидно, что эта картина сохраняется при малых гладких возмущениях. Поэтому грубые системы образуют открытое подмножество в пространстве B_G .

Более того, из представленных ниже простых соображений, основанных на повороте векторного поля, следует, что если X не является грубой системой, то для любых $\delta > 0$ существует грубая система, которая δ -близка к X . Другими словами, грубые системы образуют плотное множество в B_G .

Из теоремы Андронова-Понтрягина непосредственно следует, что грубая система может обладать только конечным числом состояний равновесия и периодических орбит в G .

Необходимость условий (1) и (2) теоремы Андронова–Понтрягина очевидна. Действительно, если система грубая в G , она должна оставаться грубой и в любой подобласти G . Поэтому, выбрав малую окрестность состояния равновесия, заключаем, что система в окрестности этого состояния равновесия также должна быть грубой. Аналогичное наблюдение верно и для грубых предельных циклов.

Теория 2. Формулировка и смысл теоремы Гробмана-Хартмана.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Теорема Гробмана-Хартмана

Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто.

Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо и точка $x_0 \in U$ – гиперболическая неподвижная точка f .

Тогда $\exists$ окрестности U_1, U_2, V_1, V_2 точки x_0 и такой гомеоморфизм $h : U_1 \cup U_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$ что

$$h(f(x)) = Df(x_0)h(x) \text{ на } U_1$$

$Df(x_0) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейная часть отображения f в точке x_0 .

В окрестности неподвижной гиперболической точки отображение топологически сопряжено со своей линейной частью. Другими словами, в окрестности гиперболической неподвижной точки поведение динамической системы с точностью до непрерывной замены координат совпадает с поведением ее линеаризации.

Благодаря теореме Гробмана-Хартмана можно использовать более простую линеаризацию для анализа поведения вокруг состояния равновесия.

Определение

Гиперболической точкой отображения называется неподвижная точка, в которой все мультипликаторы μ_i (собственные числа линеаризации отображения в данной точке) по модулю отличны от единицы.

Определение

Неподвижная точка – точка, которую заданное отображение переводит в неё же, иными словами, решение уравнения $f(x) = x$.

Теория 3. Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Поверхность X называется **гиперболической**, если в любой ее точке гауссова кривизна отрицательна. **Гауссова кривизна** – мера искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки, равна произведению нормалей кривизны в главных направлениях. Для плоскости она равна нулю, на сфере – везде $\frac{1}{R^2}$, на торе есть точки с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной.

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности обеспечивает **теорема Гаусса-Бонне**:

Теорема

Пусть Ω – компактное двумерное ориентированное риманово многообразие с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через K гауссову кривизну Ω и через k_g геодезическую кривизну $\partial\Omega$. Тогда

$$\int_{\Omega} K \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} k_g \, ds = 2\pi\chi(\Omega),$$

где $\chi(\Omega)$ — эйлерова характеристика Ω .

В частности, если у Ω нет границы, получаем

$$\int_{\Omega} K \, d\sigma = 2\pi\chi(\Omega)$$

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Если поверхность деформируется, то её эйлерова характеристика не меняется, в то время как гауссова кривизна может меняться поточечно. Тем не менее, согласно формуле Гаусса-Бонне, интеграл гауссовой кривизны остаётся тот же.

Эйлерова характеристика – целочисленная характеристика топологического пространства. Эйлерова характеристика замкнутой ориентированной поверхности связана с её родом γ (числом ручек, то есть числом торов в связной сумме, представляющей эту поверхность) соотношением

$$\chi = 2 - 2\gamma(n) = 2 - (n - 4) * 2^{n-2} - 2 = (4 - n) * 2^{n-2}$$

Чтобы посчитать, сколько ручек нужно добавить, чтобы растянуть граф без пересечения ребер (безсветофорная сеть), используется формула, где вместо n подставляется размерность графа n -мерного куба

$$\gamma(n) = (n - 4) * 2^{n-3} + 1$$

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Среди компактных поверхностей гиперболическими являются в точности те, которые имеют отрицательную Эйлерову характеристику, т.е. $\gamma > 1$. Т.о., гиперболическими являются все компактные поверхности, за исключением семи следующих: сфера, диск, кольцо, тор, лента Мебиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна.

Теория 5. Какая точка называется блуждающей?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Какая точка называется блуждающей?

Рассмотрим систему $x' = X(x)$, где $X \in \mathbb{C}^1$ (непрерывно дифференцируемая функция) определена в замкнутой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, границы которой состоят из $(n - 1)$ -мерных поверхностей без контакта с векторным полем, ориентированных внутрь G .

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Область называется ограниченной, если существует круг на плоскости или шар в пространстве, содержащий данную область.

Замкнутая, ограниченная область называется компактом.

Следовательно для любой точки $x_0 \in G$ положительная полутраектория $x(t, x_0)$ определена при любой начальной точке x_0 .

Положительная полутраектория – это множество

$$\{x \in G : x = X(t, x_0), t \in T, t > 0.\}$$

Определение.

Точка x_0 называется блуждающей, если у нее существует такая окрестность $U(x)$, что при некотором $T > 0$ при всех $t \geq T$ выполняется $U(x) \cap x(t, U) = \emptyset$.

Здесь $x(t, U) = U(x(t, \xi))$, $\xi \in U$.

Это означает, что все точки окрестности $U(x)$ начиная с некоторого момента T покидают навсегда окрестность $U(x)$.

Из определения следует, что каждая точка $\xi \in U$ также является блуждающей, поэтому множество всех блуждающих точек открыто (Открытое множество — это множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью). Кроме того, легко видеть, что если точка x_0 — блуждающая, то точка $x(t, x_0)$ также блуждающая для любого t .

Из открытости множества блуждающих точек вытекает, что его дополнение — множество неблуждающих точек M_1 замкнуто.

Теория 6. Что означает устойчивость по Пуассону?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Определение

Точка x_0 фазового пространства называется устойчивой по Пуассону в положительном направлении (P^+ -устойчивой), если существует такая последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, при $n \rightarrow +\infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n, x_0) = x_0.$$

Другими словами, точка x_0 называется ω -предельной точкой своей положительной полутраектории.

Точка x_0 фазового пространства называется устойчивой по Пуассону в отрицательном направлении (P^- -устойчивой), если существует такая последовательность $t_n \rightarrow -\infty$, при $n \rightarrow +\infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n, x_0) = x_0.$$

В случае когда точка одновременно P^+ -устойчива и P^- -устойчива, говорят, она **устойчива по Пуассону**.

Что означает устойчивость по Пуассону?

Траектория называется **устойчивой по Пуассону**, если каждая ее точка является устойчивой по Пуассону.

Устойчивые по Пуассону траектории могут быть, в свою очередь, разделены на два типа в зависимости от того, ограничена или нет последовательность $\tau_k(\varepsilon)$ времен возвращения Пуанкаре P -траектории в ее ε -окрестность.

Биркгоф называл траектории первого типа **рекуррентными траекториями**.

Примером устойчивой по Пуассону траектории является состояние равновесия.

Если же рассматривается траектория, отличная от неподвижной точки, то устойчивой по Пуассону она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Поэтому устойчивыми по Пуассону будут циклы и квазипериодические траектории (суперпозиция двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами), а также более сложные траектории, возникающие в хаотических системах.

Определение

Фазовое пространство в математике и физике — пространство, каждая точка которого соответствует одному и только одному состоянию из множества всех возможных состояний системы. Точка пространства, соответствующая состоянию системы, называется «изображающей» или «представляющей» для него. Таким образом, изменению состояний системы, — т.е. её динамике — можно сопоставить движение изображающей точки;

Теория 7(8). Основные методологические идеи обобщённой непланарной модели жизненного пространства личности.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Основные методологические идеи обобщённой непланарной модели жизненного пространства личности.

Для построения модели структуры личности и ее взаимодействий с окружающей средой автором был использован язык топологии, раздела геометрии, в котором исследуются взаимное расположение фигур и расстояния между их элементами. При этом личность предстает как динамическая система ячеек, в каждой из которых помещены значимые для человека объекты внешней среды, связанные с его потребностями, выступающими движущей силой поведения.

Жизненное пространство изображалось К.Левинем в виде овала, в центре которого находится круг, символизирующий собой внутренний мир личности. Жизненное пространство имеет две основных границы: внешняя отделяет жизненное пространство от реального физического и социального макромиров, внутренняя отделяет внутренний мир личности от ее психологической среды в пределах жизненного пространства. Оболочкой внутреннего пространства служит сенсомоторная область, которая, по мысли К.Левина, служит некоторым фильтром между внутренней и внешней средой.

Основные методологические идеи обобщённой непланарной модели жизненного пространства личности.

Психологическое пространство состоит из разных секторов, регионов, которые графически изображаются разделёнными границами. Границы обладают свойством проницаемости. Факт жизненного пространства — все, что может быть осознано человеком. Событие — результат взаимодействия нескольких фактов. Количество секторов, регионов определяется количеством фактов, находящихся в данный момент в жизненном пространстве. Чем ближе сектор к личному пространству человека, тем большее влияние он оказывает.

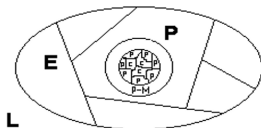
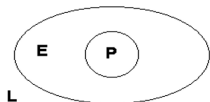
Основные методологические идеи обобщённой непланарной модели жизненного пространства личности.

L – жизненное пространство,

p – сама личность с её ячеистой структурой ,

E – психологическая среда, I - информация

Движение фокуса психической активности по ячейкам структуры личности есть процесс её самоидентификации и считывания требуем



Основные методологические идеи обобщённой непланарной модели жизненного пространства личности.

Основные идеи выстраиваемой методологии:

- ④ Вероятностное поведение личности определяется ее установками;
- ② Установки личности формируются ее устойчивым образом жизни;
- ③ Прогноз для группы = прогнозу для ее типичной личности;
- ④ Траектории личности в жизни = траекториям в ее ЖПЛ;
- ⑥ Нет необходимости выписывать уравнения этих траекторий;
- ⑥ Достаточно знание оргграфа связей между 6 сферами образа жизни;
- ⑦ Полный 6-оргграф организует трафики без пересечений на двумерной компактной, ориентированной поверхности рода $p \geq 2$, т.е. с $K < 0$ (Гауссова кривизна);
- ⑧ Это координатная составляющая фазового пространства д.с. (см. пункт 5) порождает гиперболическую динамическую систему — г.д.с.;
- ⑨ Особенности г.д.с., а т.е. и гомо-, и гетероклинические траектории изоморфно изучаемы на траекториях бильярдов, и они отождествляются с вершинами оргграфа, что порождает ТМЦ.

Основные методологические идеи обобщённой непланарной модели жизненного пространства личности.

Под 6-орграфом подразумевается полный граф с 6-ю вершинами, олицетворяющими сферы труда, культуры, быта, образования, политики и соц. среды.

Краткая выжимка: траектории по этим 6-ти сферам определяются образом жизни личности, переход между ними — условиями на границах.

Непланарность необходима потому, что 6-орграф (даже и 5-орграф) невозможно отобразить в качестве областей на планарной карте с тем условием, что каждая область должна иметь границу с каждой. С другой стороны, в пространстве это вполне возможно.

Важный вклад в развитие методов и философии сетевого анализа внес Курт Левин. В 1936 году Левин высказал предположение, что «жизненное пространство» индивидуума можно представить с помощью планарной карты. На такой карте области представляют различные типы деятельности человека, например, то, что он делает на работе, дома, или же его хобби. Эта точка зрения приводит нас к другой психологической интерпретации графа, в которой люди представляются вершинами, а их отношения — ребрами. Такими отношениями являются, например, любовь, ненависть, общение, подчинение. Левин утверждал, что структурные свойства социального пространства могут быть проанализированы с помощью математических методов топологии и теории множеств. Цель "теории поля" состоит в изучении предмета в математических терминах, а именно взаимозависимости между группой и окружающей средой в системе отношений.

Такой подход и такие идеи Левина сближают его с возникшей позже общей теорией систем. В топологическом подходе социальное поле включает «точки», соединенные «путями». Точки представляют отдельных людей, их цели и действия, а пути представляют интеракцию или причинные последовательности, которые соединяют точки. Полевая модель описывает каузальные и интеракционные взаимозависимости в социальных конфигурациях. Пути, которые идут между точками, связывают их вместе, а общая картина путей делит социальное поле на ряд дискретных «регионов». Каждый регион отделен от других отсутствием путей. Пути ведут внутрь региона, но не между регионами. Возможности передвижения в своем социальном мире определяются границами между различными регионами социального поля, в котором они расположены. Ограничения, налагаемые этими границами, являются "силами которые детерминируют поведение группы. Общее социальное поле поэтому — это поле сил, действующих на членов группы, формирующих их действия и переживания.

Подобные разработки легли в основу дальнейшего исследования «жизненного пространства» индивидуума, например, при разработке тополого-сетевой модели жизненного пространства личности, являющейся непланным топологическим обобщением модели Курта Левина.

Теория 9, 11.

Как и почему связаны в перколяционно-клеточном автомате степень перестановок, простые числа и число ручек, задающих топологию граничных условий?

Рассказать об устройстве рабочего поля перколяционно-клеточного автомата и прокомментировать пример его прикладного применения.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Перколяция

В физике и химии явлением перколяции (от лат. просачиваться, протекать) называется явление протекания или не протекания жидкостей через пористые материалы, электричества через смесь проводящих и непроводящих частиц и другие подобные процессы. Теория перколяции находит применение в описании разнообразных систем и явлений, в том числе таких, как распространение эпидемий и надежность компьютерных сетей.

Некоторые примеры задач, которые решаются через теорию перколяции:

Сколько надо добавить медных опилок в ящик с песком, чтобы смесь начала проводить ток?

Какой процент людей должен быть восприимчив к болезни, чтобы стала возможна эпидемия?

Клеточный автомат

Дискретная модель, представляющая собой сетку произвольной размерности, каждая клетка которой в каждый момент времени может принимать одно из конечного множества состояний, и определено правило перехода клеток из одного состояния в другое (состояния каждой клетки меняются в зависимости от состояния её самой и ближайших соседей).

Пусть задано конечное множество X_0 – состояний одной клетки. Для простоты будем считать ($p \geq 2$):

$$X_0 = \begin{cases} -(p-1), \dots, -1 & \text{если она имеет синий цвет (b - blue)} \\ 0 & \text{если она имеет белый цвет (w - white)} \\ 1, \dots, p-1 & \text{если она имеет красный цвет (r - red)} \end{cases}$$

Положим $X_{ij} = X_0$ для каждой клетки с координатами (i, j) 2-мерной целочисленной решётки $Z = Z^2$, предварительно разместив цвета клеток равномерно случайно по рабочему полю;

согласно условию: $N(s)_r + N(s)_b + N(s)_w = N_0 - \text{const}$, где $N(s)_{r,b,w}$ – число клеток данного цвета в момент времени s ,

при этом $N(s)_w, N_0 - \text{const}$;

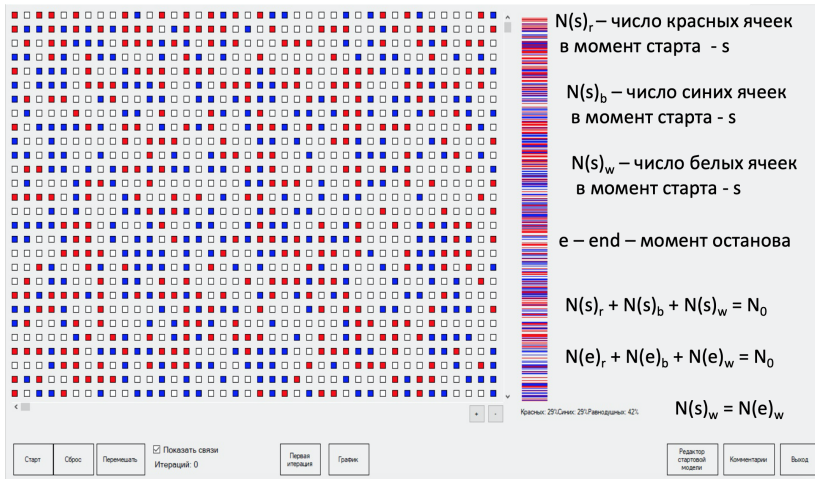
Каждая клетка с координатами (i, j) «опрашивает» своих соседей по окрестности Мура с $r = 1$ (то есть 8 соседних клеток) об их цвете:

если цвета совпадают, то состояния этих клеток не меняются;

если цвета разные, то

а) в случае белого цвета, помимо его сохранения, через эту клетку строится вектор длины $r = 2$, и в клетке на конце этого вектора цвет не меняется;

б) в случае иного цвета, состояние клетки меняется на 1 в пользу цвета клетки – источника, помимо такого акта, через эту клетку строится вектор длины $r=2$, и в клетке на конце этого вектора цвет также изменится, если она не белая, и не одного цвета с клеткой источником.

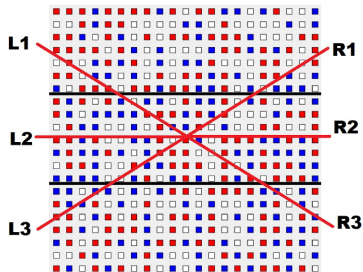


Проводится несколько итераций работы ПКА, пока он не выйдет на "плато" (количество ячеек определенного цвета).

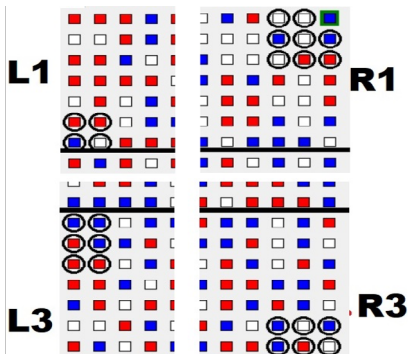
Экспериментальные вычисления в ПКА породило один из важнейших результатов – установление эмпирического факта зависимости времени релаксации ПКА (выхода на «плато» динамического равновесия) от топологического рода граничных условий рабочего поля автомата.

Топологический род поверхности γ визуализируется в виде разбиения границы на отрезки и их связывания.

Социологически это интерпретируется в виде степени связности социума.



Переход на краях поверхности

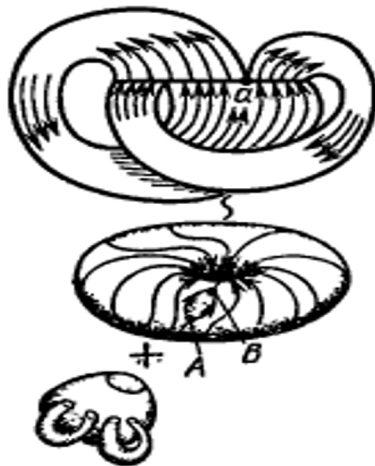


Связи клеток на краях поля

Перекладывание 3-х под-интервалов – преобразование пучка параллельных отрезков – как формирование всюду плотных траекторий на компактной 2-мерной поверхности рода 3 (тор, приклеенный к кренделю).

Всюду плотная траектория на множестве по определению проходит через любую сколь угодно малую окрестность произвольной точки на этом множестве.

Множество M называется всюду плотным в множестве N , если в любой окрестности из N существуют точки из M .



Возникает эффект перемешивания.

Для сильной эргодичности, т.е. возможности считать средние величины для всего рабочего поля ПКА, необходимы простые числа: 3, 5, 7, 11,...

По существу в основе этого перекладывания лежит перестановка степени 3, которая совпадает с родом поверхности $\gamma = 3$, т.е., к примеру, 1-2-3 переходит в 3-2-1. В итоге возникает эффект перемешивания влияний цветных клеток ПКА друг на друга, при этом чем больше связность, т.е. «ручек», тем быстрее происходит перемешивание, и таким образом, быстрее осуществляется процесс усреднения. Для того, чтобы рабочее поле имело одну эргодическую компоненту, необходимую для расчёта средних величин, требуется чтобы степенями перестановок были простые числа.

- ① Род поверхности γ существенно влияет на процесс перколяции: с ростом рода, т.е. степени связности социума, увеличивается скорость процесса релаксации к локальному равновесию;
- ② Уменьшение плотности неактивных клеток решётки рабочего поля взаимозаменяемо с родом поверхности γ

Топологическая энтропия показывает меру сложности системы. Возникает вопрос о топологической энтропии клеточного автомата. К настоящему времени накопилось достаточно много информации о многомерных ($d \geq 2$) клеточных автоматах. Например, в работе (D'amico M., Manzini G., Margara L. On Computing the Entropy of Cellular Automata // Theoretical Computer Science.) показано, что если локальные правила являются линейной (булевой) функцией, то топологическая энтропия $/h_{top}$ равна либо нулю, либо бесконечности. В работе (Лакштанов Е.Л., Лангваген Е.С. Критерий бесконечности топологической энтропии многомерных клеточных автоматов) найдено достаточное условие бесконечности $/h_{top}$ большого класса КА, а именно наличие так называемых "космических кораблей часто возникающих в КА типа "Игра Жизнь".

Конфигурация «Жизни» или другого клеточного автомата называется космическим кораблём, если через определённое количество поколений она вновь появляется без дополнений или потерь, но со смещением относительно исходного положения.

Заметим при этом, что h_{top} одномерного клеточного автомата всегда ограничена величиной, зависящей только от радиуса взаимодействия клеток. Из совокупности этих исследований становится ясно, что топологическая энтропия КА при описании многомерных клеточных автоматов требует дополнительных нормировок; при этом вид нормировочных коэффициентов имеет и самостоятельный интерес, поскольку он определяет вид асимптотики функции информации - естественной величины, измеряющей сложность КА. Ранее Милнор поставил вопрос о получении оценки $0 < h_{top}(F) < \infty$, а Синай представил пример ответа на него с использованием перенормировки, т.е. замены нормирующего множителя $1/n$ на другой, с большей скоростью сходимости.

Если ПКА как динамическая система имеет устойчивое стационарное состояние, то его топологическая энтропия положительна и не равна бесконечности

Место действия этой игры — «вселенная» — это размеченная на клетки поверхность или плоскость — безграничная, ограниченная, или замкнутая (в пределе — бесконечная плоскость).

Каждая клетка на этой поверхности может находиться в двух состояниях: быть «живой» (заполненной) или быть «мёртвой» (пустой).

Клетка имеет восемь соседей, окружающих её.

Распределение живых клеток в начале игры называется первым поколением.

Каждое следующее поколение рассчитывается на основе предыдущего по таким правилам:

- 1 в пустой (мёртвой) клетке, рядом с которой ровно три живые клетки, зарождается жизнь;
- 2 если у живой клетки есть две или три живые соседки, то эта клетка продолжает жить; в противном случае, если соседей меньше двух или больше трёх, клетка умирает («от одиночества» или «от перенаселённости»)

Игра прекращается, если

- ❶ на поле не останется ни одной «живой» клетки
- ❷ конфигурация на очередном шаге в точности (без сдвигов и поворотов) повторит себя же на одном из более ранних шагов (складывается периодическая конфигурация)
- ❸ при очередном шаге ни одна из клеток не меняет своего состояния (складывается стабильная конфигурация; предыдущее правило, вырожденное до одного шага назад)

Эти простые правила приводят к огромному разнообразию форм, которые могут возникнуть в игре. Игрок не принимает прямого участия в игре, а лишь расставляет или генерирует начальную конфигурацию «живых» клеток, которые затем взаимодействуют согласно правилам уже без его участия (он является наблюдателем).

Теория 10. Записать формулой основную догму
символьной динамики и прокомментировать её.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Записать формулой основную догму символьной динамики и прокомментировать её.

Под **символьной динамикой** понимают обычно тот специальный раздел общей теории динамических систем, в котором изучаются каскады и потоки, порожденные гомеоморфизмом сдвига σ в различных пространствах Σ последовательностей

$$\omega = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty},$$

где ω_n – буквы некоторого алфавита $\mathcal{L} : \sigma\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$.

Когда говорят о **методах символической динамики**, то имеют в виду изучение произвольных ДС при помощи символической модели, в которых последовательность букв соответствует траекториям изучаемой системы, а отображение σ – некоторому сдвигу вдоль этих траекторий.

Наиболее эффективными методы символической динамики оказываются в тех ситуациях, где изучаемые детерминированные системы обнаруживают аналогию со случайными процессами.

Записать формулой основную догму символьной динамики и прокомментировать её.

Рассмотрим следующие рассуждения, чтобы понять, откуда в строго детерминированной системе возникнут аналогии со случайным процессом.

Пусть на фазовом пространстве X действует динамическая система с дискретным временем (каскад) $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$, порожденная отображением $f : X \rightarrow X$. Эта система строго детерминирована: задав точное начальное состояние x_0 , мы однозначно определяем траекторию $x_n = f^n x_0, n \in \mathbb{Z}$.

Предположим теперь, что мы наблюдаем за системой, регистрируя показания некоторого прибора, который обладает ограниченной точностью, может показывать только конечный набор значений $1, \dots, m$;

Другими словами, $X = \bigcup_{i=1}^m E_i$ и при $x \in E_i$ прибор показывает значение i . Множества E_i , вообще говоря, могут пересекаться и тогда стрелка прибора будет стоять между делениями (но пока это не учитываем в наших рассуждениях).

Записать формулой основную догму символьной динамики и прокомментировать её.

Пусть ω_0 – начальное показание прибора, то есть $x_0 \in E_{\omega_0}$. Через время t образ $f^t E_{\omega_0}$ множества может оказаться весьма вытянутым и может пересекаться более чем с одним из множеств E_i . Поэтому результат наблюдения в момент времени t значением ω_0 определяется неоднозначно. Произошла кажущаяся потеря детерминизма, вызванная не вмешательством случая, а нашим предположением о невозможности точного определения положения фазовой точки.

Регистрируя показания прибора для всех моментов времени, мы получаем отображение $\psi : X \rightarrow \Sigma$, сопоставляющее точке x последовательность $\omega = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ так, что

$$\psi(x) = \omega = \{\omega_n\} \iff f^n x \in E_{\omega_n} \iff x \in \bigcap_n f^{-n} E_{\omega_n}.$$

Данное соотношение называется **основной догмой символической динамики**.

Записать формулой основную догму символьной динамики и прокомментировать её.

При удачном выборе "прибора" то есть множеств E_i , основная догма символьной динамики может дать важную информацию о свойствах каскада $\{f^n\}$. В этом случае, рассматриваемая ДС обладает свойствами, присущими вероятностным марковским цепям и их топологическим аналогам.

Теория 12. Какое фундаментальное свойство динамических систем открыл С.Смейл?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Какое фундаментальное свойство динамических систем открыл С.Смейл?

При размерности фазового пространства $n \geq 3$ существуют динамические системы (диффеоморфизм трёх мерного тора), в окрестности которых нет ни одного структурно устойчивого (грубого) диффеоморфизма.

Диффеоморфизм — взаимно однозначное и гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ гладкого многообразия M в гладкое многообразие N , обратное к которому тоже является гладким.

Это означает, что на 4-х мерном многообразии имеется векторное поле, которое нельзя сделать структурно устойчивым посредством малого шевеления.

Это разрушило надежды математической общественности на построение классификации «грубых систем» для размерности фазового пространства $n \geq 3$

Какое фундаментальное свойство динамических систем открыл С.Смейл?

Гипотеза Пуанкаре и её доказательство С.Смейлом.

Гипотеза Пуанкаре: любое компактное односвязное трехмерное многообразие без края гомеоморфно 3-х мерной сфере.

Стивен Смейл доказал, что гипотеза верна в пространствах размерности пять и больше. До этого всегда считалось, что задачи легче решать в пространствах, которые мы можем себе представить.

Смейл проложил новые пути, решая задачи в более высоких размерностях до того как решить их в меньших, и сегодня это обычная практика. Математики говорят, что дополнительные измерения дают им возможность использования мнимых объектов.